LAHENDUSED   9.KLASS

1. *Vastus*: $eabc = \frac{1}{2}$

Lahendus:

Kuna on antud nende arvude aritmeetiline keskmine, siis $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 2$ ehk $a+b+c+d+e = 10$ ja teame ka, et $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 1$.
Teisendades antud võrdust, saame
$\frac{1}{abcd} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{cdea} + \frac{1}{deab} = \frac{e+a+b+c}{abcde} = \frac{10-d}{1} = 10-d$. Järelikult $10-d = 8$ ehk $d = 2$.
Et $1 = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = d \cdot eabc = 2 \cdot eabc$, siis $eabc = \frac{1}{2}$.

Hindamine:

Aritmeetilist keskmist kasutades leitud arvude summa:	2p
Leitud arvu d väärtus:	3p
Leitud korrutise $eabc$ väärtus:	2p
	7p

Märkus: Ainult õige vastus: 2p

2.

Lahendus:

Näitame esmalt, et jagub arvuga 2.

Kolmest antud arvust vähemalt kaks on sama paarsusega. Olgu nendeks näiteks arvud a ja b. Sel juhul liidetav $c^2(a+b)$ on kindlasti paarisarv. Kui a ja b mõlemad on paarisarvud siis $a^2(b+c)$ ja $b^2(a+c)$ on mõlemad kindlasti paarisarvud. Kui a ja b mõlemad on paaritud, siis summad $b+c$ ja $a+c$ on paaritud ja ka $a^2(b+c)$ ja $b^2(a+c)$ on mõlemad paaritud ja summa $a^2(b+c)+b^2(a+c)$ järelikult paaris. Kokku saame, et $a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$ on paaris ja järelikult jagub arvuga 2.

Näitame, et jagub arvuga 3.

Lahendus 1:

Et $a+b+c$ jagub arvuga 3, siis leidub selline täisarv y, et $a+b+c=3y$.

Seega saame teisendada:

$$
\begin{aligned}
&a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)= \\
&=ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)= \\
&=ab(3y-c)+ac(3y-b)+bc(3y-a)= \\
&=3(aby+acy+bcy-abc).
\end{aligned}
$$

Lahendus 2:

Et $a+b+c$ jagub arvuga 3, siis leidub selline täisarv x, et $a+b+c=3x$.

Seega

$$
\begin{aligned}
&a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)=a^2(3x-a)+b^2(3x-b)+c^2(3x-c)= \\
&=3x(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)
\end{aligned}
$$

Et esimene liidetav jagub arvuga 3, siis on piisav näidata, et teine liidetav jagub ka arvuga 3.

Arvu kuup annab arvuga 3 jagamisel sama jäägi, mis arv ise.

$$(3p+1)^3=27p^3+27p^2+9p+1$$

$$(3p+2)^3=27p^3+54p^2+12p+8=27p^3+54p^2+12p+6+2$$

Seega $a^3+b^3+c^3$ annab arvuga 3 jagamisel sama jäägi, mis $a+b+c$.

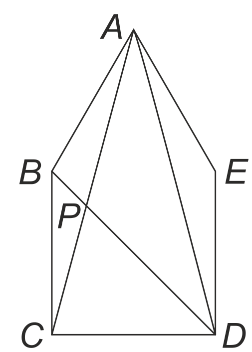
Järelikult ka liidetav $a^3+b^3+c^3$ jagub arvuga 3.

Hindamine:

Näitamine, et jagub arvuga 2:	2p
Näitamine, et jagub arvuga 3:	5p
Sealhulgas $a+b+c=3y$:	1p
Lahendus 1: Teisendatud kasulikule kujule:	4p
Lahendus 2: Teisendatud lahenduss antud kujule või mingile analoogsele:	2p
Näidatud, et see jagub arvuga 3:	2p
	7p

3.

Lahendus:



Nelinurk $BCDE$ on ruut, sest lõigud BC, CD ja DE on võrdsete pikkustega ning BC ja CD on risti ja CD ja DE on risti. Kuna ka AB, AE ja BE on võrdsete pikkustega, siis ABE on võrdkülgne kolmnurk.

Meil on

$\angle CBA = \angle CBE + \angle EBA = 90° + 60° = 150°$

$\angle AED = \angle AEB + \angle BED = 60° + 90° = 150°.$

Kuna AB, BC, DE ja AE on kõik võrdsed, siis kolmnurgad ABC ja AED on võrdsed.

Seega $\angle BAC = \angle ACB = \angle DAE = \angle EDA = \frac{180° - 150°}{2} = 15°$.

Kuna ruudu diagonaal poolitab ruudu nurga, siis

$\angle ADP = \angle EDB - \angle EDA = 45° - 15° = 30°,$

$\angle PAD = \angle BAE - \angle BAC - \angle DAE = 60° - 2 \cdot 15° = 30°$.

Seega ADP on võrdhaarne kolmnurk, alusega AD ja järelikult PA ning PB on võrdsed.

Hindamine:

Märgatud, et $BCDE$ on ruut ja ABE on võrdkülgne kolmnurk:	1p
Joonestatud täiendavalt lõik AD:	1p
Leitud nurkade CBA ja DEA suurused:	1p
Leitud nurkade EAD ja EDA nurkade suurused:	1p
Leitud nurkade PDA ja PAD suurused:	2p
Järeldus, et kolmnurka ADP peab olema võrdhaarne kolmnurk:	1p
	7p

***4. Vastus.* Ei ole võimalik**

Lahendus:

Olgu ühe kolmnurga aluse pikkus a ja haara pikkus b. Sel juhul teise kolmnurga haara pikkus on a ja aluse pikkus b.
Oletame, et sellised kolmnurgad leiduvad ja tingimusi kitsendamata võime teha oletuse, et esimese kolmnurga ümbermõõt on suurem. Sel juhul peab kehtima võrdus, et $a+2b=1{,}25(2a+b)$.
Sellest võrdusest saame, et $1{,}5a=0{,}75b$ ehk $2a=b$. See aga ei ole võimalik, sest kolmnurga võrratuse põhjal $2b>a$.

Hindamine:

Kirja pandud võrdus $a+2b=1{,}25(2a+b)$:	2p
Leitud, et sel juhul peab $2a=b$:	2p
Kasutatud kolmnurga võrratust:	2p
Tehtud õige järeldus:	1p
	7p

Märkus: Ainult vastuse eest, et see pole võimalik, anda 0p.
Vastus leitud mingite konkreetsete arvudega: 1p

***5. Vastus*. Võimalus endale võit kindlustada on Katil.**

Lahendus:

Kati lahutab esimesel korral arvust 2020 selle jagaja 1 ja kirjutab tahvlile arvu 2019.
Paaritu arvu iga tegur on paaritu. Seega sõltumata sellest, millise jagaja Mati lahutab, kirjutab ta tahvlile paarisarvu.
Kati saab jällegi lahutada arvu 1 ja kirjutada tahvlile paaritu arvu.
Mati peab jällegi tahvlile kirjutama paarisarvu.
Nii saab Kati alati kirjutada tahvlile paaritu arvu ja seega ei saa ta kirjutada paarisarvu 0.
Märkus: Samamoodi võib Kati tegelikult lahutada ükskõik millise paarituarvulise jagaja – oluline on just see, et ta ise kirjutaks tahvlile alati paaritu arvu.

Hindamine:

Tähelepanek, et Kati peab alati kirjutama tahvlile paaritu arvu:	4p
Näidatud, et Katil on alati see võimalus olemas (näiteks, et saab alati arvu 1 lahutada):	3p
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest, et Kati, kes alustab, saab endale võidu kindlustada, anda 0 punkti.